Sessione straordinaria 2016
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sei addetto alla gestione di una macchina utensile in cui è presente un contenitore di olio lubrificante avente la forma di un cono circolare retto col vertice rivolto verso il basso. Il raggio di base r del cono è 4 cm mentre l'altezza h è 12 cm. In tale contenitore, inizialmente vuoto, viene versato automaticamente dell'olio lubrificante alla velocità di $12\pi\ \frac{cm^3}{s}$. Devi assicurarti che il processo avvenga correttamente, senza produrre traboccamenti di olio.

1. Determina l'espressione della funzione $h(t)$, che rappresenta il livello h (in cm) raggiunto dall'olio all'istante t (in secondi) e la velocità con la quale cresce il livello dell'olio durante il riempimento del contenitore.
2. Al fine di programmare il processo di versamento da parte della macchina utensile, determina il tempo t_R necessario perché il contenitore sia riempito fino al 75% della sua altezza.
3. Devi realizzare un indicatore graduato, da porre lungo l'apotema del cono, che indichi il volume V di olio presente nel recipiente in corrispondenza del livello raggiunto dall'olio l_A, misurato all'apotema. Individua l'espressione della funzione $V(l_A)$ da utilizzare per realizzare tale indicatore graduato.
4. A causa di un cambiamento nell'utilizzo della macchina, ti viene richiesto di progettare un nuovo e più capiente recipiente conico, avente apotema a uguale a quello del contenitore attualmente in uso. Determina i valori di h e di r in corrispondenza dei quali il volume del cono è massimo e verifica, a parità di flusso di olio in ingresso e di tempo di riempimento t_R, a quale livello di riempimento si arriva. È ancora pari al 75% dell'altezza?

PROBLEMA 2

La funzione $f: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ è così definita:

$$f(x) = sen(x) - x \cdot \cos(x)$$

1) Dimostra che f è una funzione dispari, che per $x \in]0, \pi]$ si ha $f(x) > 0$ e che esiste un solo valore $x_0 \in]0,2\pi]$ tale che $f(x_0) = 0$. Traccia inoltre il grafico della funzione per $x \in [0,5\pi]$.
2) Determina il valore dell'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

e, sapendo che risulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

prova che risulta verificata la disequazione:

$$\pi^3 + 18\pi < 96$$

anche non conoscendo il valore di π.

3) Verifica che, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, risulta:

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)dx = 4,$$

$$\int_0^{2n\pi} f(x)dx = 0.$$

4) Dimostra che i massimi della funzione $f^2(x)$ giacciono su una parabola e i minimi su una retta, e scrivi l'equazione della parabola e della retta.

QUESTIONARIO

1. Calcolare il limite:

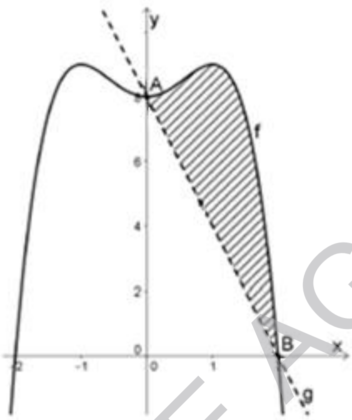
$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(cos(x) - 1)}{ln(cos^2(x))}$$

2. In media, il 4% dei passeggeri dei tram di una città non paga il biglietto. Qual è la probabilità che ci sia almeno un passeggero senza biglietto in un tram con 40 persone? Se il numero di persone raddoppia, la probabilità raddoppia?
3. Determinare il parametro reale a in modo che i grafici di $y = x^2$ e di $y = -x^2 + 4x - a$, risultino tangenti e stabilire le coordinate del punto di tangenza.
4. Dati i punti $A(2, 4, -8)$ e $B(-2, 4, -4)$, determinare l'equazione della superficie sferica di diametro AB e l'equazione del piano tangente alla sfera e passante per A.
5. Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% difettose, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal secondo capannone?
6. In un semicerchio di raggio $r = 10$ è inscritto un triangolo in modo che due vertici si trovino sulla semicirconferenza e il terzo vertice si trovi nel centro del cerchio. Qual è l'area massima che può assumere tale triangolo?

7. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione esplicitando il procedimento seguito:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-n}$$

8. Data la funzione $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$, sia g la retta passante per i punti $A(0{,}8)$ e $B(2{,}0)$. Si calcoli l'area della regione tratteggiata indicata in figura.



9. Dati i punti $A(-2, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(0, -1, -2)$, $D(1, 1, 0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti *A*, *B*, *C* e l'equazione della retta passante per *D* e perpendicolare al piano α.

10. Si consideri, nel piano cartesiano, la regione limitata *R*, contenuta nel primo quadrante, compresa tra l'asse y ed i grafici di $y = 2^x$ e $y = x^2$. Si determinino i volumi dei solidi che si ottengono ruotando *R* attorno all'asse *x* e all'asse *y*.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.